CHU ZHONG SHU XUE FU XI KA PIAN

初中数学复习卡片

上海教育出版社

说　明

这套卡片共22幅，内容选自现行初中数学课本，同时编入新六年制大纲中有关方程、方程组和不等式的同解概念及对数的换底公式等知识。为了使有关知识系统、完整，个别地方还编入少量课本以外的内容，这些内容都用“㊉”号标出。

这套卡片图示明晰，力求以图表的形式将重要的概念、原理、公式、法则、数据、几何图形间的相互关系及一些解题的主要规律串点成线，织成一张“知识结构网”，既便于查阅，又容易记忆，适宜初中程度学生复习参考。

使用本卡片时，如果先按照课本上的相应单元小结进行复习，将更有利于加强对基础知识的理解和对基本的、常用的公式（包括定理、法则、数据）等的记忆，达到熟练运用的目的。

限于我们的水平，这套卡片难免有缺点和错误，竭诚欢迎读者批评指正。

编　者

目　　录

代数部分：

三角部分：

平面几何部分：

附录：

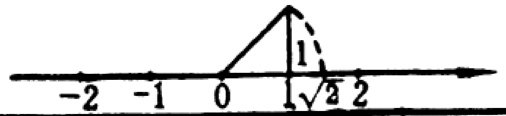
初中数学复习卡片　杨安澜　李兆民编　夏明德　周玉刚审

上海教育出版社出版　新华书店上海发行所发行　上海开封印刷厂印刷　统一书号：7150·图片1719

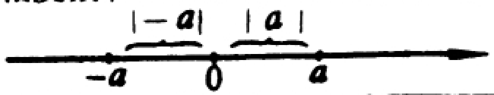
开本787×1092 50开 印张1 1983年4月第1版 1983年4月第1次印刷 印数：000,001—380,000 定价：0.35元

1. 实　数

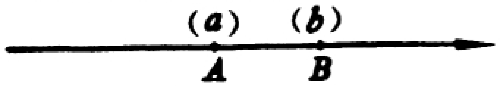
实数和数轴上的点一一对应



相反数和绝对值在数轴上的表示

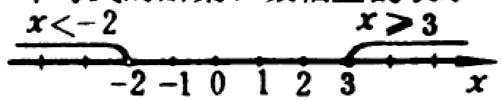


实数的大小比较



设点 A、B 对应实数 a、b
若 A 在 B 的左(右)边，则 $a<b$ ($a>b$)
若 A 和 B 重合，则 $a=b$

不等式的解集在数轴上的表示

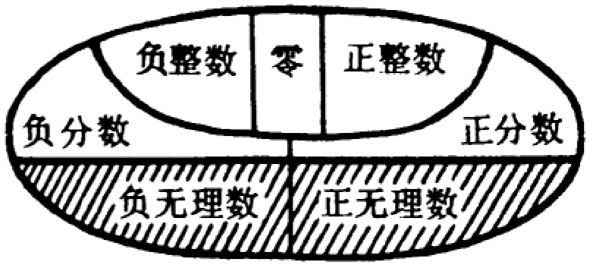


实数 $\begin{cases} 有理数 \begin{cases} 整数 \\ 分数 \end{cases} \\ 无理数 \end{cases}$

整数 $\begin{cases} 偶数(2n) \\ 奇数(2n-1 或 2n+1) \end{cases}$ (n为整数)

自然数 $\begin{cases} 质数(素数) \\ 合数 \\ 1 \end{cases}$

实数集合



0 与 1 的特点	
0 不是正数，也不是负数	1 不是质数，也不是合数
a 与 b 互为相反数 $\Longleftrightarrow a+b=0$	a 与 b 互为倒数 $\Longleftrightarrow ab=1$
$\frac{a}{0}$ 无意义	$a^0=1\ (a\neq 0)$
$ab=0 \Longleftrightarrow a$、$b$ 中至少有一个为零 $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=b=0$	$a^2=1 \Longleftrightarrow a=\pm 1$

运　算

运算法则			
运算		结果符号	绝对值
两数相加	同号	同原加数	相加
	异号	同绝对值较大者	相减
两数相乘	同号	得正	相乘
	异号	得负	
$a-b=a+(-b)$			
$a\div b=a\cdot(\frac{1}{b})$			

运算定律
交换律 $a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$
结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$ $(ab)c=a(bc)$
分配律 $a(b+c)=ab+ac$

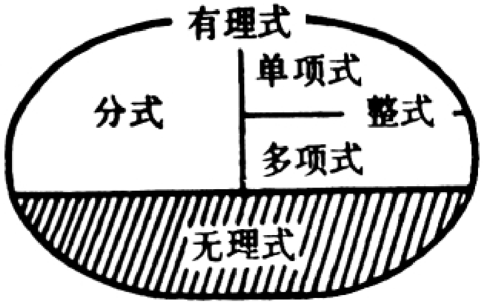
运算顺序
先乘方、开方，后乘除，再加减
同级运算，从左到右依次进行
有括号时，先进行括号内的运算

科学计数法
$a\times10^n$，其中 $1\leq a<10$，n为整数 如：$0.63017=6.3017\times10^{-1}$

近似值		
截取法	如：0.63017 精确到 0.001	有效数字
四舍五入法	$0.63017\approx6.30\times10^{-1}$	6，3，0

2. 代数式的分类、整式

代数式集合



两个多项式恒等

如：ax^2+bx+c
$\equiv px^2+qx+r$
$\Longleftrightarrow a=p,\ b=q,$
$c=r$

整 式 运 算

加减法
- 去括号：$a+(b-c)=a+b-c$
  $a-(b-c)=a-b+c$
- 合并同类项　如：$a^2-3a^2=-2a^2$

幂的运算法 则
- $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
- $(a^m)^n=a^{mn}$
- $(ab)^n=a^nb^n$
- $a^m\div a^n=a^{m-n}$

（m、n为自然数）
（$a\neq0$，$m>n$）

乘法公式
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
- $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$
- $(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$
- $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

除 法
- 多项式 ÷ 单项式
  如：$(am+bm^2-cm^3)\div m=a+bm-cm^2$
- 多项式 ÷ 多项式

$\boxed{\text{被除式}=\text{除式}\times\text{商}+\text{余式}}$

$$
\begin{array}{r}
2x+1\\
x^2+4x-3\,\big)\overline{\,2x^3+9x^2+5}\\
\underline{2x^3+8x^2-6x}\\
x^2+6x+5\\
\underline{x^2+4x-3}\\
2x+8
\end{array}
$$

$2x^3+9x^2+5$
$=(x^2+4x-3)\cdot(2x+1)+(2x+8)$

$(a+b)(c+d)=ac+ad$
$+bc+bd$

整式乘法
$\rightleftharpoons$
因式分解

1．提取公因式法

如：$-xy+y^2+y=y(y-x+1)$

2．应用乘法公式法

$ax^2+bx+c\ (a\neq0)$的分解

(1) 十字相乘法：

$$\begin{array}{ccc}1 & \times & m\\ 1 & & n\end{array}$$

$x^2+(m+n)x+mn=(x+m)(x+n)$

(2) 求根法：

先求出 $ax^2+bx+c=0$的两根 x_1,x_2

$\Longrightarrow ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

3．分组分解法

(1)分组后提取公因式或用乘法公式

(2)拆项后再分组

如：$x^3-2x^2+1=(x^3-x^2)-(x^2-1)$
$=\cdots=(x-1)(x^2-x-1)$

(3)配方后再分组

如：$x^4+x^2y^2+y^4$
$=(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2$
$=\cdots=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

a^4-4
$=(a^2+2)(a^2-2)$
（在有理数范围内）
$=(a^2+2)(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$
（在实数范围内）

* 一般未指明的，都在有理数范围内

3. 分式和比例

$\frac{a}{b}$　($b\neq0$)

分式的基本性质

$\frac{a}{b}=\frac{a\times m}{b\times m}$；$\frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}$　($m\neq0$)

约分　　通分

分式的运算

$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$　　$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$　　$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$　(n为自然数)

部分分式的变形

如：$\frac{x-3}{(x-1)(x+1)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$

可得　$x-3\equiv(A+B)x+A-B$　($x\neq\pm1$)

$\begin{cases}A+B=1\\A-B=-3\end{cases}$　　$\begin{cases}A=-1\\B=2\end{cases}$

$\therefore\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}$

繁分式

形如：$\frac{\frac{c}{b}}{a}$，$\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$，$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

化　简

(1)写成分子除以分母的形式

如：$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

$\frac{a}{\frac{c}{d}}=a\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{c}$

(2)用分式的基本性质

如：$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)ab}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)ab}$

$=\frac{a+b}{b-a}$

比

$a:b$ ＝ $\frac{a}{b}$

比的前项　比　比的后项　　比值

若y与x成正比，则 $y:x=k$　或$y=kx$

若y与x成反比，则 $y:\frac{1}{x}=k$　或$xy=k$

(k叫做比例常数)

比　　例

$a:b=c:d$　或　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

内项　外项　　第四比例项

比　　例　　性　　质

若 $a:b=c:d$ 则：

(1) $ad=bc$　　(2) $b:a=d:c$

(3) $a:c=b:d$，$d:b=c:a$　　(4) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(5) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$　　(6) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

(7)设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$，　则 $\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$

($b+d+\cdots+n\neq0$)

注意：设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=k$，则 $a=bk$，$c=dk$，$\cdots$

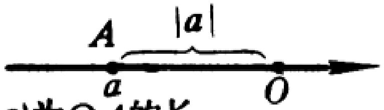
4. 根式和绝对值

$\sqrt{a^2}=|a|$

绝对值

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$$

几何意义：

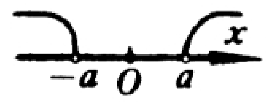
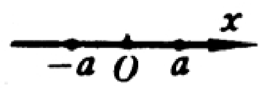


$|a|$为OA的长

(1) $a\neq0\Longleftrightarrow|a|>0$； $|a|+|b|=0\Longleftrightarrow a=b=0$

(2) $|a|=|-a|$； $|a|^2=a^2$

解含有绝对值的不等式和方程

类型	$\|x\|<a$	$\|x\|>a$	$\|x\|=a$
$a>0$	$-a<x<a$	$x>a$或$x<-a$	$x=\pm a$
			
$a=0$	空 集（无解）	$x\neq0$	$x=0$
$a<0$	空 集	全体实数	空 集

根 式

$\sqrt[n]{a}$：根指数 n，被开方数 a

方根：若$x^n=a$（n是大于1的自然数）则x叫做a的n次方根

算术根：

正数a的正方根$\sqrt[n]{a}$叫做算术根

零的算术根仍为零

性 质

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=a$

(2)

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & (n\text{为奇数})\\ |a| & (n\text{为偶数})\end{cases}$$

(3)

$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ $(a\geqslant0)$

$\sqrt[k]{a^{mk}}=a^m$ $(a\geqslant0)$

（m，n，k为自然数且n，$k>1$）

运 算 法 则

(1) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$，$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ $(a\geqslant0,b\geqslant0)$

(2) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$，$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(a\geqslant0,b>0)$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ $(a\geqslant0)$

(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ $(a\geqslant0)$

运 算

根式的加减运算 $\xrightarrow{(1)\text{化为最简根式}\quad(2)\text{合并同类根式}}$ 最简根式

根式的乘除运算 $\xrightarrow[\text{（或）化为分数指数幂运算}]{\text{化为同次根式运算}}$ 最简根式

分母有理化：如：$\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$

$$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$$

*形如$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$的运算

$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\sqrt{(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2}=|\sqrt{x}\pm\sqrt{y}|$，其中$\begin{cases}x+y=a\\ xy=b\end{cases}$

5． 指数和对数

指数 | 对数

幂 | 真数

指数式 $a^b=N\ \left(\begin{smallmatrix}a>0\\a\neq1\end{smallmatrix}\right)$

对数式 $\log_a N=b\ \left(\begin{smallmatrix}a>0\\a\neq1\\N>0\end{smallmatrix}\right)$

底　数

有理指数幂的概念

（m、n为正整数）

$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n}$

$a^0=1\quad(a\neq0)$

$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\quad(a\neq0)$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\quad(a>0，n>1)$

$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\quad(a>0，n>1)$

对　数　的　性　质

$a^{\log_a N}=N$，　$\log_a a=1$，　$\log_a 1=0$

$(a>0，a\neq1，N>0)$

常　用　对　数　lgN　的　性　质

(1) $\lg 10^n=n$

(2) 若 $1\leqslant a<10$，则 $0\leqslant \lg a<1$

(3) 若 $N=a\times10^n$　($1\leqslant a<10$，n为整数)

则　$\lg N=n$（首数）$+\lg a$（尾数）

如：$\lg 5026=\lg(5.026\times10^3)=3.7012$

又如：　$\lg N=-2.2988=\bar{3}.7012$

$N=0.005026$

运　算　法　则

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$a^m\div a^n=a^m\cdot a^{-n}=a^{m+(-n)}$

} $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$(a^m)^n=a^{mn}$ —— $(a^m)^n=a^{mn}$

$(ab)^n=a^nb^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

} $(ab)^n=a^nb^n$

（其中$a>0,b>0$，m、n为有理数）

$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

$\log_a M^n=n\log_a M$

$\log_a\sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M$

（其中 $a>0,a\neq1,M>0,N>0$）

⊛ 换　底　公　式

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}\qquad(a>0，a\neq1，b>0，b\neq1，N>0)$$

6. 方　　程

一元方程的解(或根)	⊛ 方　程　的　同　解	
	同解方程	同　解　定　理
含有未知数的等式叫做方程 一元方程的一般形式是*$f(x)=0$ $x=a$是方程$f(x)=0$的解 $\iff f(a)=0$	方程$f_1(x)=0$和$f_2(x)=0$的解集相等	方程$f(x)=F(x)$和方程$f(x)+\phi(x)=F(x)+\phi(x)$同解 ($\phi(x)$是整式或常数)
		$f(x)=F(x)$和$mf(x)=mF(x)$同解 (m是不等于零的常数)
		$f_1(x)\cdot f_2(x)=0$和$f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$*同解

*$f(x)$是指x的解析式
如: $f(x)=ax^2+bx+c$

*在方程中x的允许值范围内同解

方程的解法

去分母：方程两边同乘以最简公分母
如: $\frac{1}{x}+\frac{6}{x-1}=\frac{x+3}{x^2-x}$ 方程两边同乘以$x(x-1)$

验根：把求得的根代入公分母使分母为零的舍去

$$\begin{tikzcd}
\text{分式方程} \arrow[dr, "\text{换元}", "\text{去分母}"'] & & \text{无理方程} \arrow[ll, "\text{去根号}"', "\text{换元}"] \arrow[dl, "\text{去根号}", "\text{换元}"'] \\
& \text{整式方程} &
\end{tikzcd}$$

去根号：方程的两边同次乘方
如: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=1$
$\Longrightarrow 2x+3=(1-\sqrt{x+1})^2$

验根：把求得的根代入原方程舍去不适合的

换元　如: $\frac{1}{2x-1}+\sqrt{\frac{1}{2x-1}}=2$　令$u=\sqrt{\frac{1}{2x-1}}$, 得$u^2+u-2=0$

	一元一次方程 $ax=b\ (a\neq0)$	一元二次方程　$ax^2+bx+c=0$　$(a\neq0)$			高次方程 (简单形式)
解法	$x=\frac{b}{a}$	求根公式法	配方法	因式分解法	高次方程 $\xrightarrow[\text{因式分解或换元}]{\text{降　次}}$ 一元一次(或二次)方程
	讨论: 当$a=0$, $b\neq0$方程无解 当$a=0$, $b=0$方程的解为任意实数	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(b^2-4ac\geq0)$	$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ $\Longrightarrow$ 一元一次方程	$(mx-n)(px-q)=0$ $\Longrightarrow$ $x_1=\frac{n}{m}$, $x_2=\frac{q}{p}$	如: $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq0)$ 令$y=x^2$ 得$ay^2+by+c=0$

实系数一元二次方程根的讨论		根与系数的关系
根的情况	判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$ x_1、x_2是方程的根
两个不等实根	$\Delta>0$	
两个相等实根	$\Delta=0$	
没有实数根	$\Delta<0$	

注意: Δ和两实根的结合应用
如: 方程有两个正实根
$\iff \begin{cases} \Delta\geq0 \\ -\frac{b}{a}>0 \\ \frac{c}{a}>0 \end{cases}$

7. 方 程 组

方程组的解	⊛ 方程组的同解		
	同解方程组	同解定理	
$\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}f(x,y)=0\\F(x,y)=0\end{cases}$ * 的解 $\Longleftrightarrow\begin{cases}f(a,b)=0\\F(a,b)=0\end{cases}$	方程组 $\begin{cases}f_1(x,y)=0\\F_1(x,y)=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}f_2(x,y)=0\\F_2(x,y)=0\end{cases}$ 的解集相等	方程组 $\begin{cases}f(x,y)=0\\y=F(x)\end{cases}$ 和 方程组 $\begin{cases}f[x,F(x)]=0\\y=F(x)\end{cases}$	同解
		$\begin{cases}f(x,y)=0\\F(x,y)=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}f(x,y)=0\\kf(x,y)+lF(x,y)=0\end{cases}$ (k、l 为任意常数，但 $l\neq0$)	同解
		$\begin{cases}f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)=0\\F(x,y)=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}f_1(x,y)=0\\F(x,y)=0\end{cases}$，$\begin{cases}f_2(x,y)=0\\F(x,y)=0\end{cases}$	*同解

* $f(x,y)$ 是指 x、y 的解析式

* 在方程组中 x、y 的允许值范围内同解

方程组的解法

二次方程组 →(分解) 一次方程组

二次方程组 →(消元 降次) 一元一次方程；一元二次方程

一次方程组 →(消元) 一元一次方程

一次方程组

三元一次方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$$

↓ 代入法 加减法 消元

二元一次方程组

$$\begin{cases}a_1'x+b_1'y=c_1'\\a_2'x+b_2'y=c_2'\end{cases}$$

↓ 代入法 加减法 消元

一元一次方程

二次方程组

$$\begin{cases}ax+by+c=0\\Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\end{cases}$$

(a、b，A、B、C 都不同时为零)

代入法 消元 → 一元一次(或二次)方程

特殊形式：$\begin{cases}x+y=m\\xy=n\end{cases}$ 则 x,y 为方程 $u^2-mu+n=0$ 的两个根

$$\begin{cases}A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0\\A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0\end{cases}$$

(A_1、B_1、C_1，A_2、B_2、C_2 都不同时为零)

某些形式：

可因式分解：有一个或两个方程可分解成一次方程的	当 $\dfrac{D_1}{D_2}=\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{F_1}{F_2}$ 时，消去一次项和常数项	当 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ 时，消去二次项	当 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$ (或 $\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{E_1}{E_2}$) 时，消去 x (或 y)

降次 消元 → 一元一次(或二次)方程

解应用题时常用的等量关系

1. 行程：距离 = 速度 × 时间	4. 混合物：纯量 = 混合量 × 浓度
2. 工程：总工作量 = 工效 × 工时	5. 增长率：增长量 = 原量 × 增长率
3. 航行：顺流速 = 静水时船速 + 水速；逆流速 = 静水时船速 − 水速	6. 十进数的表示：如：四位数 $ABCD$ 可写成 $A\times10^3+B\times10^2+C\times10+D$

8. 不　等　式

不等式的性质
若$a>b$，则$a+c>b+c$（或$a-c>b-c$）
若$a>b$，$c>0$，则$ac>bc$（或$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$）
若$a>b$，$c<0$，则$ac<bc$（或$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$）

㊟不等式的同解	
同解不等式	同解定理
不等式$f_1(x)>F_1(x)$和$f_2(x)>F_2(x)$的解集相等	不等式$f(x)>F(x)$和下列不等式同解： (1) $f(x)+\phi(x)>F(x)+\phi(x)$ （$\phi(x)$是整式或常数）
	(2) $m>0$，$mf(x)>mF(x)$
	(3) $m<0$，$mf(x)<mF(x)$

不等式的解

一元一次不等式	解集
$ax>b$ $(a\neq 0)$	$a>0, x>\frac{b}{a}$；$a<0, x<\frac{b}{a}$

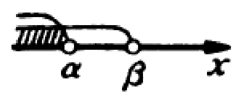
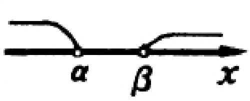
一元二次不等式

$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ $(a\neq 0)$

因式分解法：

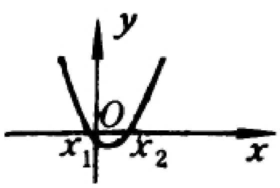
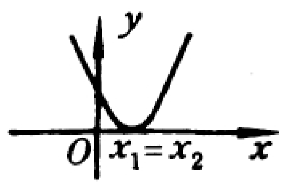
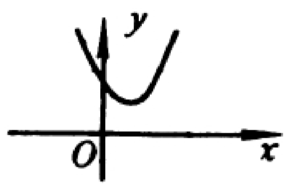
$(x-\alpha)(x-\beta)>0$ $(\alpha<\beta)$ 解集：$x<\alpha$ 或 $x>\beta$
$(x-\alpha)(x-\beta)<0$ $(\alpha<\beta)$ 解集：$\alpha<x<\beta$

分式不等式
$\frac{x-\alpha}{x-\beta}>0$ $(\alpha<\beta)$ 解集：$x<\alpha$或$x>\beta$
$\frac{x-\alpha}{x-\beta}<0$ $(\alpha<\beta)$ 解集：$\alpha<x<\beta$

一元一次不等式组	解集（设$\alpha<\beta$）	在数轴上表示解集
$\begin{cases} x>\alpha \\ x>\beta \end{cases}$	“两大从大” $x>\beta$	
$\begin{cases} x<\alpha \\ x<\beta \end{cases}$	“两小从小” $x<\alpha$	
$\begin{cases} x>\alpha \\ x<\beta \end{cases}$	“一大一小就相连” $\alpha<x<\beta$	
$\begin{cases} x<\alpha \\ x>\beta \end{cases}$	“不能相连是空集” 空　集	

求根法　图象法

令：$y=ax^2+bx+c$

判别式 $\Delta=b^2-4ac$		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$的图象（以$a>0$为例）				
（令$y=0$） $ax^2+bx+c=0$的根		有两个不等实根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(x_1<x_2)$	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实根
不等式的解	$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x\neq-\frac{b}{2a}$的所有实数	全体实数
	$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$	$x_1<x<x_2$	空　集	空　集

9. 平面直角坐标系

点P和它的坐标(x, y)的关系

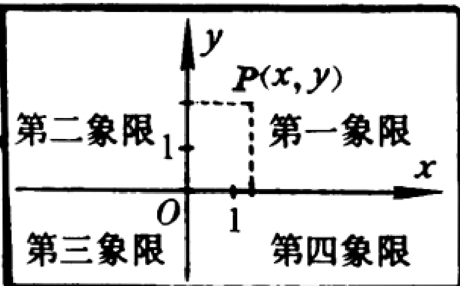
1 平面上的点与有序实数对之间一一对应

点 $P \longleftrightarrow (x, y)$

2

点P在各象限内的坐标符号				点P在坐标轴上的坐标		
一	二	三	四	x轴	y轴	原点
$x>0$	$x<0$		$x>0$	$(x,0)$	$(0,y)$	$(0,0)$
$y>0$		$y<0$				

3 $P(x, y)$ 关于
- 横轴的对称点是$(x,-y)$
- 纵轴的对称点是$(-x,y)$
- 原点的对称点是$(-x,-y)$



坐标法

在平面内建立了平面直角坐标系，就可以把“形”和“数”结合起来，用代数的方法来研究几何图形

在运用时应适当地建立坐标系

常用公式

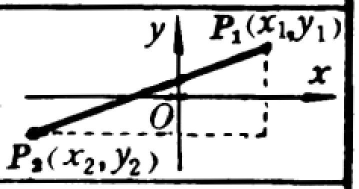
1 数轴上有向线段AB的数量及长度

$AB = x_B - x_A$

$|AB| = |x_B - x_A|$

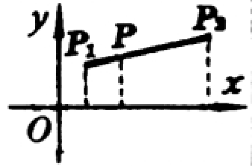
2 平面内两点间的距离

$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



3 线段的定比分点公式

若$\dfrac{P_1P}{PP_2}=\lambda(\lambda>0)$，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$

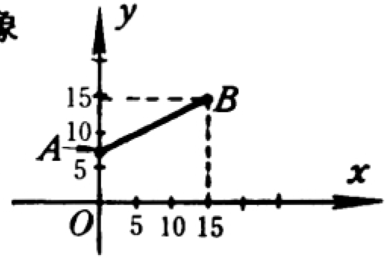


则分点P的坐标：$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$ 当$\lambda=1$时 P为中点 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$

函数的图象表示法

(1)已知函数解析式，用描点法画图象

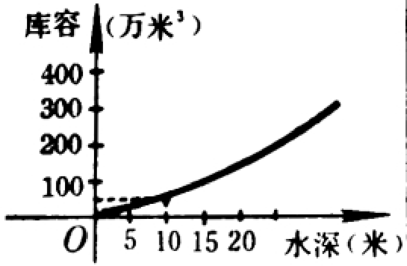
如：$y=\dfrac{1}{2}x+7$ $(0\leqslant x\leqslant 15)$ 图象是：线段AB



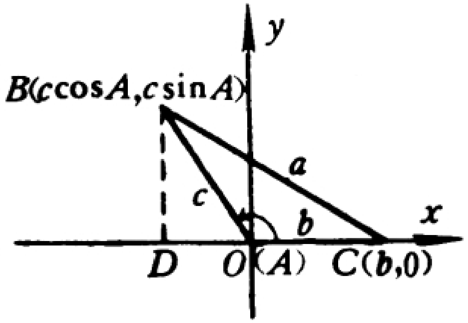
(2)已知图象，求曲线上点的坐标

如：根据库容曲线图填表：

水深（米）	5	10	15	20
库容(万米^3)	25	50	…	…



证明三角形边角关系及面积



(1)余弦定理：如：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

即 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\because a^2=|BC|^2=(c\cos A-b)^2+(c\sin A)^2$

$=\cdots=b^2+c^2-2bc\cos A$

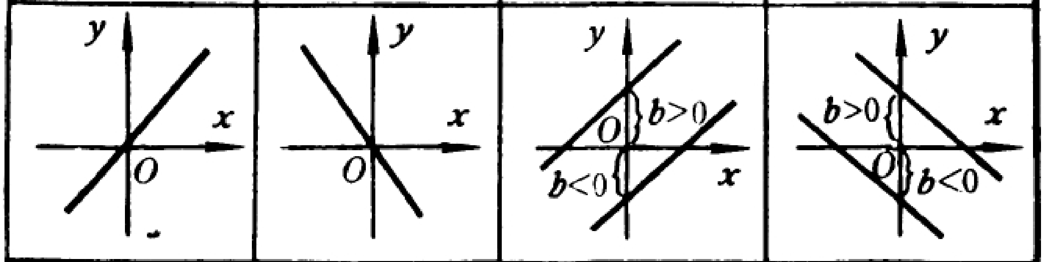
(2) 三角形面积公式：

如：$S_\triangle=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

(3) 正弦定理：

从上面面积公式得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}(=2R)$

10. 函　数

函数	一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq0)$			
	正比例函数 $y=kx$ $(b=0)$		$y=kx+b$ $(b\neq0)$	
	$k>0$	$k<0$	$k>0$	$k<0$
图象				
	是经过原点和 $(1,k)$ 的一条直线		是经过 $(0,b)$ 且平行于直线 $y=kx$ 的直线	
性质	*$x\nearrow\Longrightarrow y\nearrow$	$x\nearrow\Longrightarrow y\searrow$	$x\nearrow\Longrightarrow y\nearrow$	$x\nearrow\Longrightarrow y\searrow$
	k 表示直线 $y=kx$ 或 $y=kx+b$ 对 x 轴的倾斜程度 $\lvert k\rvert$ 越小(大)，直线和 x 轴所夹的锐角越小(大)			

函数概念

1. 常量与变量

如：$y=kx+b$，其中 k、b 为常量，y 为因变量，x 为自变量

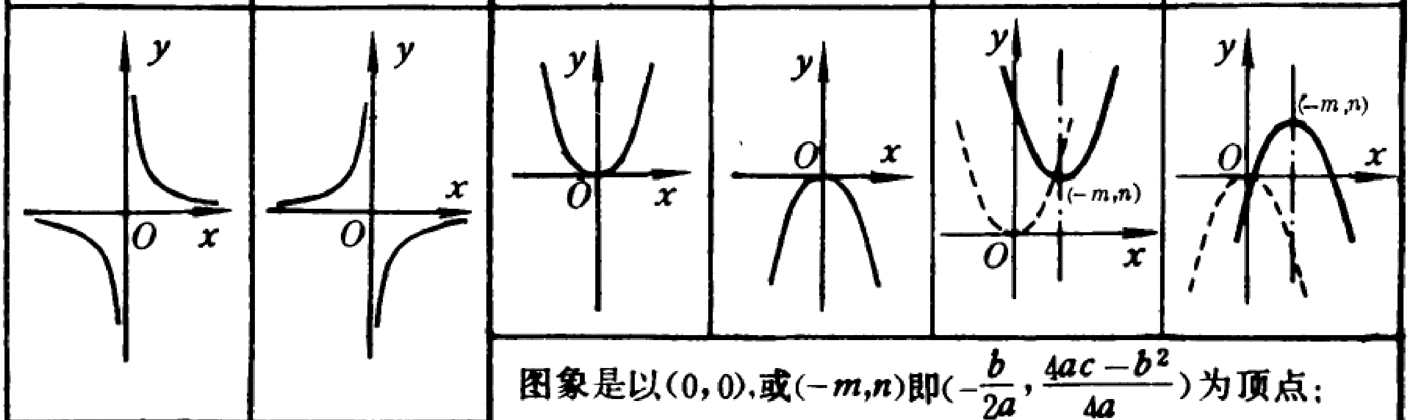
2. 自变量取值范围

如：

$y=\frac{1}{1+x}$：$x\neq-1$

$y=\sqrt{1+x}$：$x\geqslant-1$

$y=1+x$：x 取任意实数

函数	反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$		二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$			
			$y=ax^2$ $(b=c=0)$		$y=a(x+m)^2+n$	
	$k>0$	$k<0$	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
图象						
	是以原点为对称中心的双曲线		图象是以 $(0,0)$，或 $(-m,n)$ 即 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 为顶点；以 y 轴，或直线 $x=-m$（即 $x=-\frac{b}{2a}$）为对称轴的抛物线			
性质	图象分别在第一、三象限内 $x\nearrow\Longrightarrow y\searrow$	图象分别在第二、四象限内 $x\nearrow\Longrightarrow y\nearrow$	抛物线开口向上(下)并向上(下)方无限伸展 $a>0(a<0)$：当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，$x\nearrow\Longrightarrow y\searrow(\nearrow)$ 当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，$x\nearrow\Longrightarrow y\nearrow(\searrow)$			
	双曲线的两个分支都无限接近 x 轴和 y 轴，但永远不能到达		$a>0$：当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 取最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ $a<0$：当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 取最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$			
			开口大小：$\lvert a\rvert$ 越大(小)，抛物线的开口越小(大)			

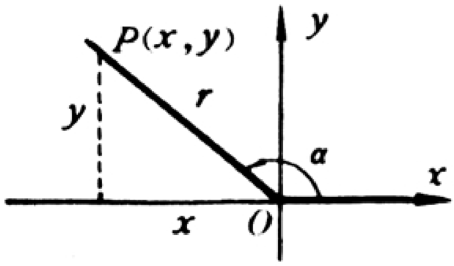
$y=ax^2+bx+c=a(x+m)^2+n$ $(a\neq0)$

根据三个独立条件可以确定 a、b、c 或 a、m、n

*（$x\nearrow$ 指 x 增大；$y\searrow$ 指 y 减小）

11． 三角函数

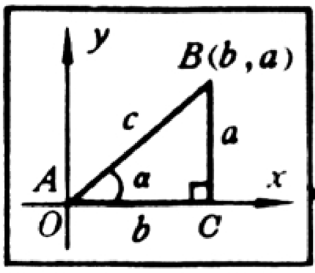
角α的三角函数

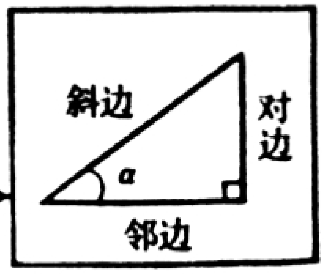


α的正弦：$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，α的余弦：$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$

α的正切：$tg\alpha=\dfrac{y}{x}$，α的余切：$ctg\alpha=\dfrac{x}{y}$

直角三角形中锐角α的三角函数





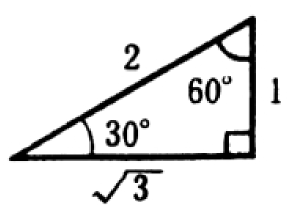
$\sin\alpha=\dfrac{\alpha\text{ 的对边}}{\text{斜边}}$，　$\cos\alpha=\dfrac{\alpha\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$

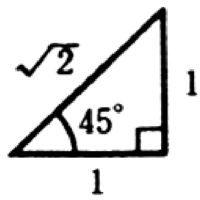
$tg\alpha=\dfrac{\alpha\text{ 的对边}}{\alpha\text{ 的邻边}}$，　$ctg\alpha=\dfrac{\alpha\text{ 的邻边}}{\alpha\text{ 的对边}}$

三角函数间的关系

同角	平方和关系	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
	商的关系	$tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
	倒数关系	$tg\alpha=\dfrac{1}{ctg\alpha}$
余角	$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$ $tg(90°-\alpha)=ctg\alpha$ $ctg(90°-\alpha)=tg\alpha$	
补角	$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ $tg(180°-\alpha)=-tg\alpha$ $ctg(180°-\alpha)=-ctg\alpha$	

特殊角的三角函数值





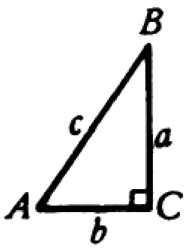
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$ctg\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

三角函数值的符号

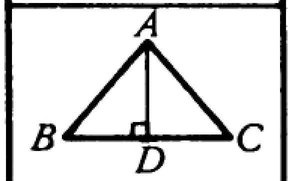
$0°<\alpha<90°$	α 的三角函数值都是正值
$90°<\alpha<180°$	$\sin\alpha>0$，　$\cos\alpha<0$ $tg\alpha<0$，　$ctg\alpha<0$

12. 解三角形

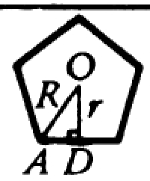
解直角三角形

图形	边角关系	解法
元素： a,b,c A,B,C $(C=90^\circ)$	$A+B=90^\circ$ $a^2+b^2=c^2$ $\sin A=\cos B=\frac{a}{c}$ $\cos A=\sin B=\frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}A=\operatorname{ctg}B=\frac{a}{b}$ $\operatorname{ctg}A=\operatorname{tg}B=\frac{b}{a}$	已知两个元素（至少有一条边）如：二边或一边一锐角可以利用边角关系，求出其他未知元素

其他图形的计算

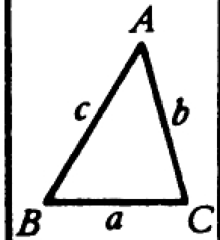


解等腰$\triangle ABC$
$\longrightarrow$解$Rt\triangle ABD$



正多边形的计算
$\longrightarrow$解$Rt\triangle AOD$

解斜三角形

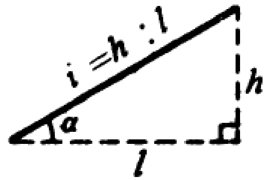


边角关系	解法：选择（已知元素）	解的结果
$A+B+C=180^\circ$ 余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$	三边	有解必唯一
	两边及夹角	有解必唯一
正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ （R为三角形外接圆半径）	两角及一边	有解必唯一
	两边一对角	有两解、一解或无解

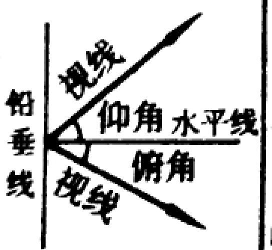
解实际问题

坡度问题

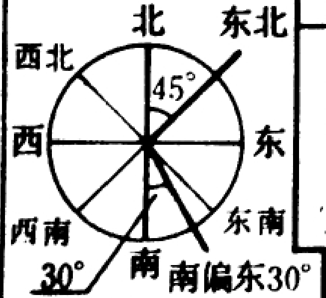
$$i=\frac{h}{l}=\operatorname{tg}\alpha$$



仰角 俯角



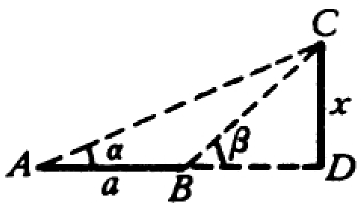
方位



测量

测高

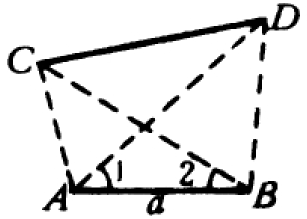
已知：α、β、a
求：CD



（设$CD=x$，则$x\operatorname{ctg}\alpha-x\operatorname{ctg}\beta=a$）

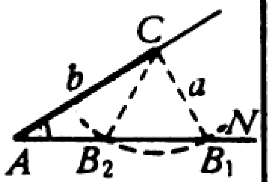
测距

已知：$\angle 1$、$\angle 2$、a
$\angle CAB$、$\angle ABD$
求：CD



（求出：AC，AD，$\angle CAD\Longrightarrow CD$）

已知两边一对角（a，b，A）解三角形的讨论

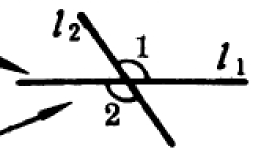
从作图看有几解	用正弦定理（求B）	用余弦定理（求c）
以圆弧与射线AN公共点（除点A外）的个数决定几解	当$\sin B>1$ 无解 当$\sin B=1$ $\Longrightarrow B=90^\circ$ 一解 当$\sin B<1$ $\Longrightarrow B_1,B_2$ 若$\begin{cases}B_1+A<180^\circ\\B_2+A<180^\circ\end{cases}$ 二解 若$\begin{cases}B_1+A<180^\circ\\B_2+A\geq180^\circ\end{cases}$ 一解	解关于c的方程 $c^2-2bc\cos A+(b^2-a^2)=0$ 以正根的个数确定几解

13． 相交线和平行线

两点决定一条直线

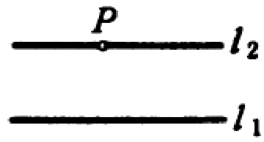
对顶角相等（∠1＝∠2）

两条直线相交



两条直线相交只有一个交点

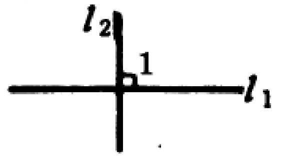
两条直线平行



同一平面内不相交的两条直线叫做平行线

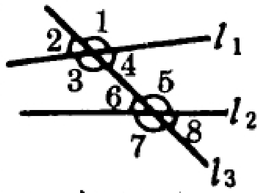
经过直线l_1外一点P，有且只有一条直线 $l_2 // l_1$

两条直线互相垂直



$l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow \angle 1 = 90°$

三 线 八 角

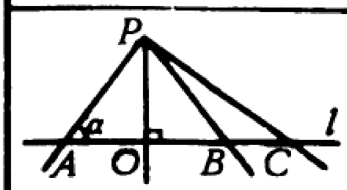


四对同位角（如∠1 和∠5）

二对内错角（如∠3 和∠5）

二对同旁内角（如∠3 和∠6）

垂 线 和 斜 线



过点P或O有且只有一条直线$PO \perp l$

$PO < PA$（PO的长叫做P到l的距离）

射影

斜线长PA和它的射影OA的关系

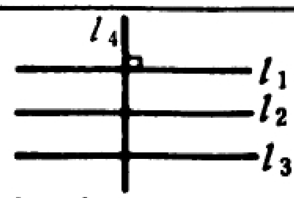
$OA = PA\cos a$

$PA = PB \Longleftrightarrow OA = OB$

$PA < PC \Longleftrightarrow OA < OC$

	平行线判定	平行线性质
线角关系	同位角相等 或内错角相等 或同旁内角互补	$\Longleftrightarrow$ 两条直线平行

线线关系

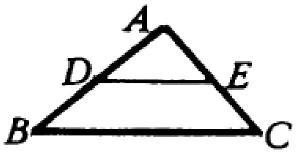


$\left.\begin{array}{l} l_1 // l_3 \\ l_2 // l_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow l_1 // l_2$

$\left.\begin{array}{l} l_1 \perp l_4 \\ l_2 \perp l_4 \end{array}\right\} \Longrightarrow l_1 // l_2$

$\left.\begin{array}{l} l_1 // l_2 \\ l_1 \perp l_4 \end{array}\right\} \Longrightarrow l_2 \perp l_4$

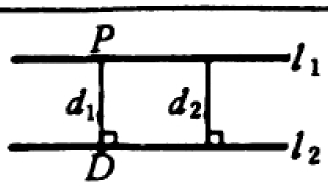
中位线



$\left.\begin{array}{l} AD = DB \\ AE = EC \end{array}\right\} \Longrightarrow DE // BC\ (DE = \frac{1}{2}BC)$

$AE = EC \Longleftarrow \left\{\begin{array}{l} DE // BC \\ AD = DB \end{array}\right.$

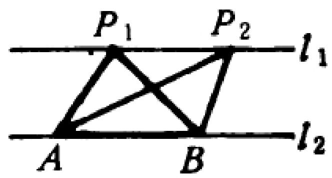
等 距



$l_1 // l_2 \Longrightarrow d_1 = d_2$

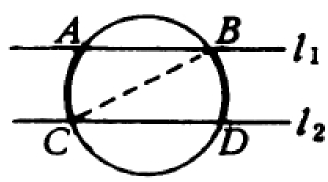
（PD的长叫做平行线间的距离）

等 积



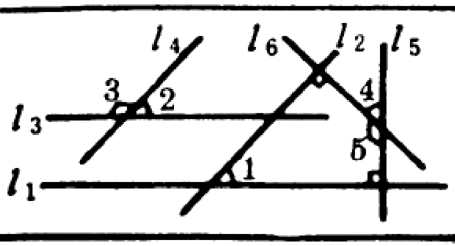
$l_1 // l_2 \Longrightarrow S_{\triangle P_1AB} = S_{\triangle P_2AB}$

等 弧



$l_1 // l_2 \Longrightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

等 角 （ 或 互 补 ）



$\left.\begin{array}{l} l_1 // l_3 \\ l_2 // l_4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \angle 1 = \angle 2$ 或 $\angle 1 + \angle 3 = 180°$

$\left.\begin{array}{l} l_1 \perp l_5 \\ l_2 \perp l_6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \angle 1 = \angle 4$ 或 $\angle 1 + \angle 5 = 180°$

14. 三 角 形

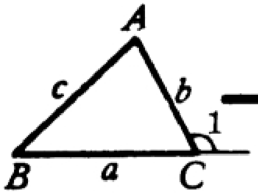
三角形的边角关系

角与角	$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ $\angle 1=\angle A+\angle B$
边与边	$a-b<c<a+b$
边与角	$a=b \Longleftrightarrow \angle A=\angle B$ $a>b \Longleftrightarrow \angle A>\angle B$

凸n边形

内角和：$(n-2)\cdot 180^\circ$

外角和：360°

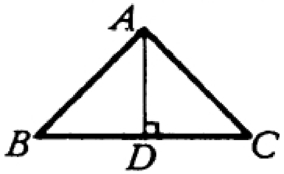


分类

按边分：不等边三角形；等腰三角形（等边三角形）

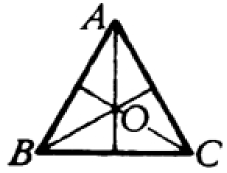
按角分：锐角三角形；直角三角形；钝角三角形

等腰△ABC（$AB=AC$）



性质	(1) $\angle B=\angle C$ (2)“三线”(h_a、m_a、t_a)合一所在直线是它的对称轴 (3)“四心”共线（都在对称轴上）
判定	$\angle B=\angle C$ ⊛ h_a、m_a、t_a中有两条重合

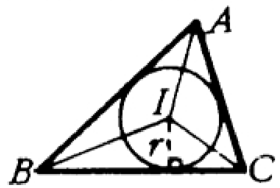
等边△ABC（$AB=BC=AC$）



性质	(1) $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$ (2)是有三条对称轴的轴对称图形 (3)“四心”合一（叫做中心）
判定	$\angle A=\angle B=\angle C$ 有一个角为60°，且是等腰三角形

四心

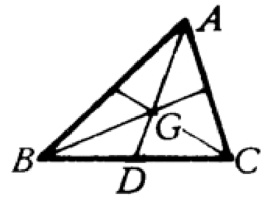
内心（I）



I：三条内角平分线交点

$S_\triangle=sr$ ($s=\dfrac{a+b+c}{2}$)

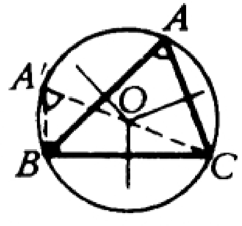
重心（G）



G：三条中线交点

$AG=\dfrac{2}{3}AD$

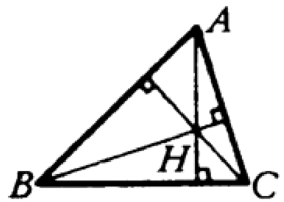
外心（O）



$Rt\triangle BA'C \Longrightarrow \dfrac{a}{2R}=\sin A$

O：三条边的垂直平分线交点

垂心（H）

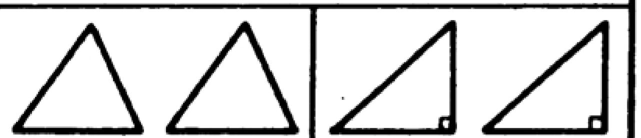


H：三条高的交点

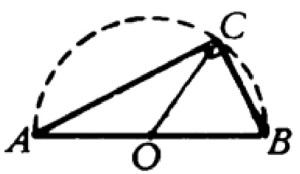
锐角（钝角）$\triangle ABC$的O和H在形内（在形外）

$Rt\triangle ABC$的O在斜边中点处，H在直角顶点处

全等三角形

图形		
判定	角边角 ASA 角角边 AAS	一边一锐角对应相等
	边角边 SAS	二直角边对应相等
	边边边 SSS	斜边、直角边 HL
性质	(1)对应角相等 (2)对应线段（边、中线、高、角平分线）相等	

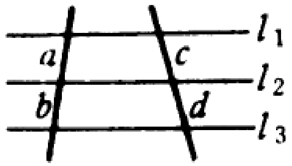
$Rt\triangle ABC$（$\angle C=90^\circ$）



性质	(1) $\angle A+\angle B=90^\circ$ (2) $a^2+b^2=c^2$ (3) $\angle A=30^\circ \Longleftrightarrow a=\frac{1}{2}c$ (4) $AO=OB \Longleftrightarrow CO=\frac{1}{2}AB$
判定	$\angle A+\angle B=90^\circ$ $a^2+b^2=c^2$ $AO=OB=CO$

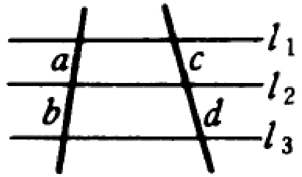
15. 相似形和比例线段

平行线等分线段定理

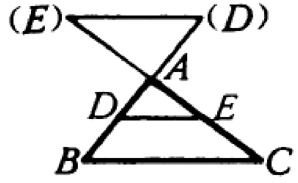


$\left.\begin{matrix} l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3 \\ a=b \end{matrix}\right\} \Longrightarrow c=d$

平行线分线段成比例定理



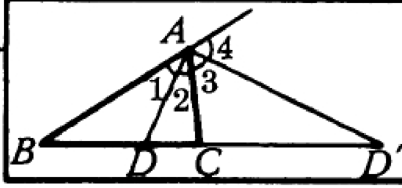
$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3 \Longrightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$



$DE /\!/ BC \Longleftrightarrow \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$

$\Longrightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$

三角形内角、外角平分线性质



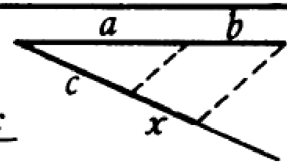
$\angle 1=\angle 2 \Longrightarrow \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BA}{AC}$

$\angle 3=\angle 4 \Longrightarrow \dfrac{BD'}{D'C}=\dfrac{AB}{AC}$

作已知三线段的第四比例项

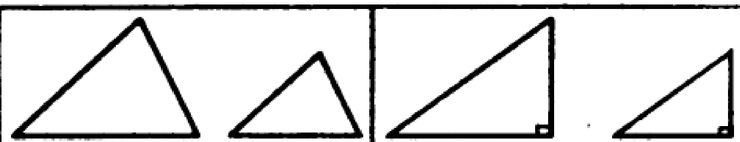
已知：a、b、c

求作：x，使 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{x}$，即 $x=\dfrac{bc}{a}$



相似三角形

相似三角形

图形		
判定	两角对应相等	一锐角相等
	两边对应成比例且夹角相等	两边对应成比例
	三边对应成比例	
性质	(1) 对应角相等 (2) 对应线段（边、中线、高、角平分线）成比例 (3) 周长的比等于相似比 (4) 面积的比等于相似比的平方	

两线段的比

两线段的比：$\dfrac{a}{b}$ 是指用同一单位去量 a、b 所得的量数的比

成比例线段：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

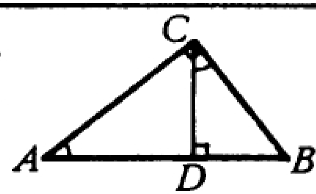
可运用实数的比和比例的性质

直角三角形中成比例的线段

$\angle C=90^\circ$

CD 是高

$\Longrightarrow$



$\left.\begin{matrix} (1)\ AC^2=AD\cdot AB \\ (2)\ BC^2=BD\cdot BA \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow AC^2+BC^2=AB^2$

(3) $CD^2=AD\cdot BD$

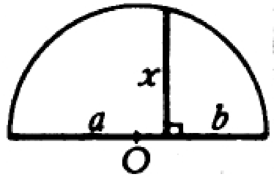
(4) $AB\cdot CD=AC\cdot CB$

作已知两线段的比例中项

已知 a、b

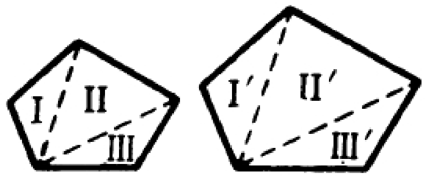
求作 x

使 $x^2=ab$



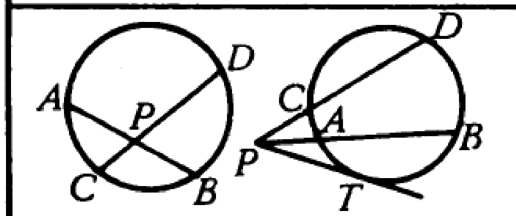
相似多边形

相似多边形 $\left\{\begin{matrix} \text{对应角相等} \\ \text{对应边成比例} \end{matrix}\right.$



判定	△Ⅰ∽△Ⅰ′，△Ⅱ∽△Ⅱ′，△Ⅲ∽△Ⅲ′ 且三角形排列顺序相同或相反
性质	（1）周长的比等于相似比 （2）面积的比等于相似比的平方

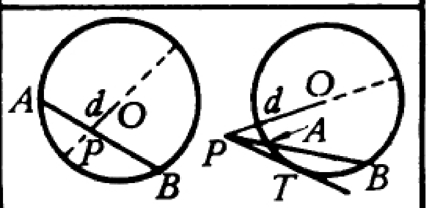
与圆有关的比例线段



$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

$PT^2=PC\cdot PD=PA\cdot PB$

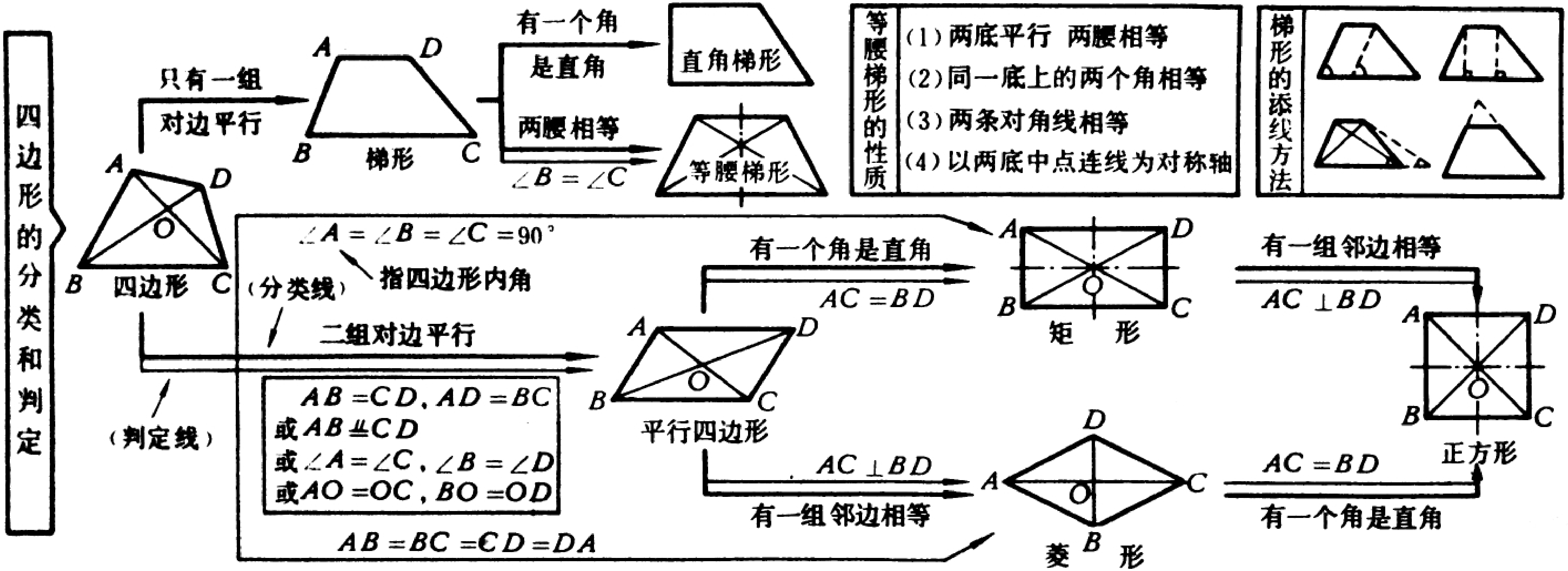
*圆幂定理



若 $PO=d$，⊙O 半径为 R

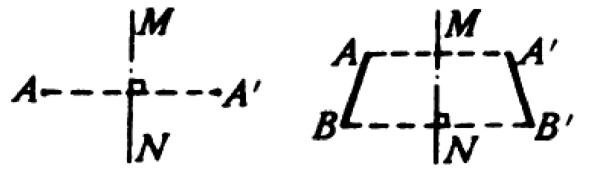
则 $PA\cdot PB=|d^2-R^2|$

16. 四 边 形



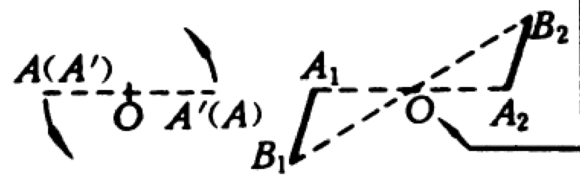
	平行四边形	矩形	菱形	正方形
性质	(1) $AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD$ $AD \mathrel{\underline{\parallel}} BC$ (2) $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$ (3) $AO=OC$，$BO=OD$ (4) 以O为对称中心	(1) 具有平行四边形的一切性质 (2) $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$ (3) $AC=BD$ (4) 以对边中点连线为对称轴	(1) 具有平行四边形的一切性质 (2) $AB=BC=CD=DA$ (3) $AC \perp BD$ (4) $\angle DAC=\angle BAC$，… (5) 以AC、BD为对称轴	(1) 具有平行四边形的一切性质 (2) $AB=BC=CD=DA$ (3) $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$ (4) $AC=BD$，$AC \perp BD$ (5) 以AC、BD和对边中点连线为对称轴

轴对称



对称轴垂直且平分连结两个对称点的线段

中心对称



对称中心平分连结两个对称点的线段

中点的应用

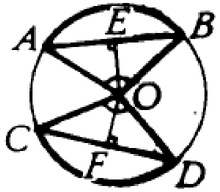
中线放长一倍，连成平行四边形

中点配中点，连成中位线

梯形中位线EF
$=\frac{1}{2}(AD+BC)$

17. 圆

圆心角、弧、弦、弦心距的关系



圆心角等($\angle AOB=\angle COD$)

$\Longleftrightarrow$ 劣弧等($\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$)

$\Longleftrightarrow$ 弦等($AB=CD$)

$\Longleftrightarrow$ 弦心距等($OE=OF$)

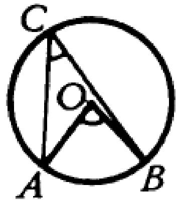
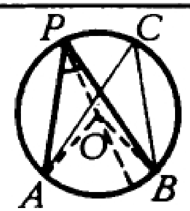
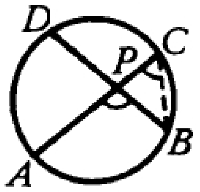
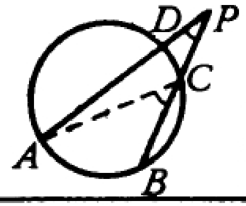
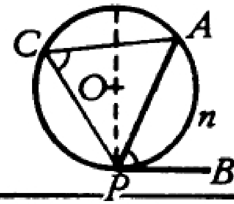
是中心对称图形，圆心是对称中心

不在一直线上的三点决定一个圆

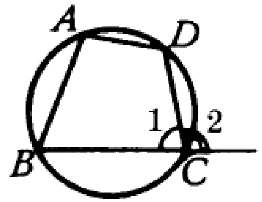
圆

是轴对称图形，任一直径都是对称轴

与圆有关的角

	圆心角	圆周角	圆内角	圆外角	弦切角
图形					
度量	$\angle AOB \overset{m}{=} \overset{\frown}{AB}$	$\angle APB \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$	$\angle APB \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{DC})$	$\angle APB \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{DC})$	$\angle APB \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AnP}$
性质	$\angle AOB=2\angle ACB$	$\angle APB=\angle ACB$	$\angle APB>\angle ACB$	$\angle APB<\angle ACB$	$\angle APB=\angle PCA$

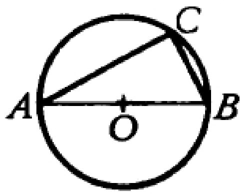
圆内接四边形



四边形$ABCD$内接于圆

$\Longrightarrow \begin{cases}\angle A+\angle 1=180^\circ \\ \angle 2=\angle A\end{cases}$

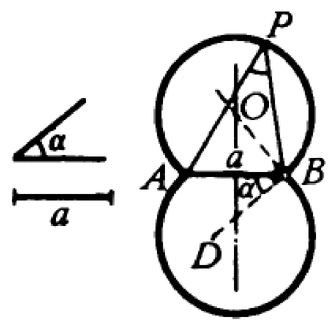
直径上的圆周角



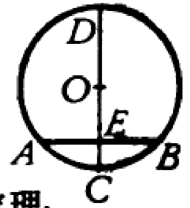
AB为直径

$\Longleftrightarrow \angle C=90^\circ$

在定线段上作含定角的弓形弧



垂直于弦的直径的性质



垂径定理：

直径$DC\perp AB$，E为垂足 $\Longrightarrow \begin{cases}AE=EB \\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB} \\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}\end{cases}$

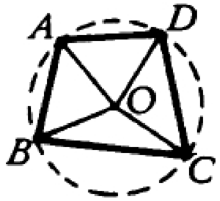
推论：一直线如果有下列性质中的两个性质，就有其他三个性质

(1)过圆心，(2)平分弦

(3)垂直弦，(4)平分劣弧

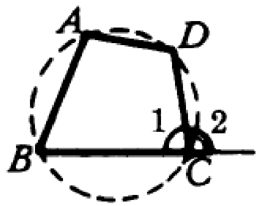
(5)平分优弧

证明四点共圆方法

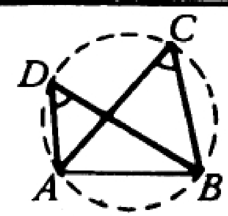


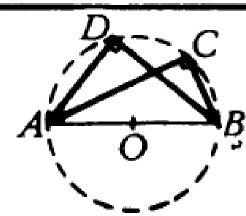
$OA=OB=OC=OD$

$\Longrightarrow A、B、C、D$共圆



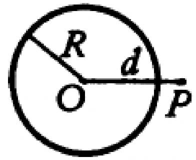
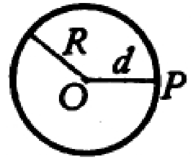
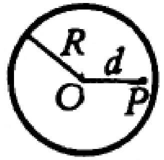
$\angle A+\angle 1=180^\circ$ 或 $\angle 2=\angle A$ $\Longrightarrow A、B、C、D$共圆

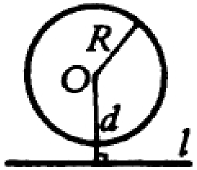
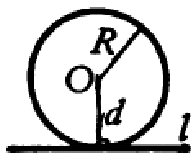
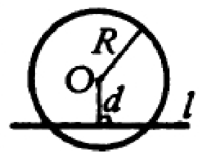




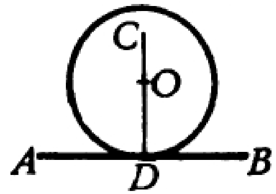
$\left.\begin{matrix}\angle C=\angle D \\ C、D\text{在}AB\text{同旁}\end{matrix}\right\} \Longrightarrow A、B、C、D$共圆 $\Longleftarrow \begin{cases}\angle C=Rt\angle \\ \angle D=Rt\angle\end{cases}$

18. 点、直线、圆和圆的位置关系

点和圆的位置关系	点在圆外	点在圆上	点在圆内
d 与 R 的关系	$d>R$	$d=R$	$d<R$
图　　形 （$d=OP$）			

直线和圆的位置关系	相　离	相　切	相　交
直线和圆的公共点个数	0	1	2
d 与 R 的关系	$d>R$	$d=R$	$d<R$
图　　形 （d 为 O 到 l 的距离）			

切线



判定

OD是⊙O半径
AB过点D
$AB\perp OD$
$\Rightarrow$ AB是⊙O的切线

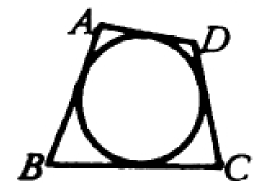
性质

(1) AB切⊙O于D $\Longrightarrow AB\perp OD$

(2) AB切⊙O于D，$CD\perp AB$ $\Longrightarrow$ CD过点O

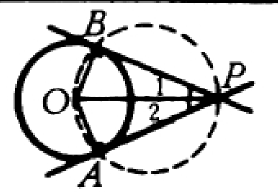
(3) AB切⊙O于D，$CO\perp AB$ $\Longrightarrow$ CO过点D

圆外切四边形

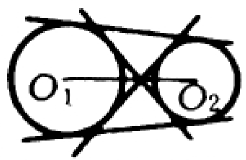
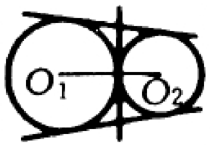
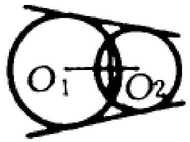
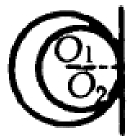
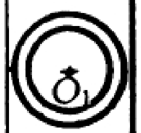


四边形$ABCD$外切于圆 $\Longleftrightarrow AB+DC=AD+BC$

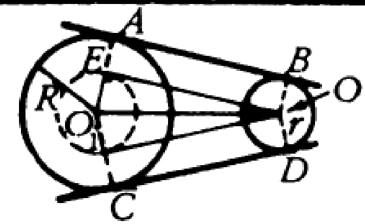
切线长定理



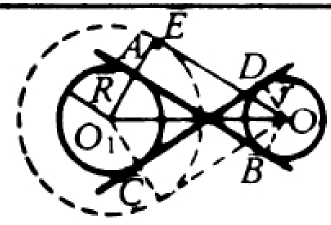
PA、PB分别切⊙O于A、B $\Longrightarrow$ $PA=PB$，$\angle 1=\angle 2$

两圆的位置关系	相离（无公共点）	外切（一个公共点）	相交（两个公共点）	内切（一个公共点）	内含（无公共点）	内含（无公共点）同心
d 与 R、r 的关系	$d>R+r$	$d=R+r$	$R-r<d<R+r$	$d=R-r$	$d<R-r$	$d=0$
图　形 （$R>r$，$d=O_1O_2$）						
外公切线的条数	2	2	2	1	0	0
内公切线的条数	2	1	0	0	0	0
性质：连心线	连心线过内（外）公切线的交点	连心线过切点	连心线垂直平分公共弦	连心线过切点		
性质：公切线长	两条外（内）公切线的长相等					

两圆内外公切线作法及计算



在Rt△O_1OE中，$OO_1=d$
$O_1E=R-r$，OE等于外公切线长



在Rt△O_1OE中，$O_1O=d$
$O_1E=R+r$，OE等于内公切线长

19. 正多边形和圆

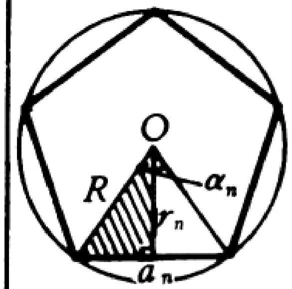
正多边形的性质

(1)正多边形都有一个外接圆(半径:R)和内切圆(半径:r)，且两个圆是同心圆,圆心O叫做中心

(2)一般可以用作中心角$\alpha_n=\dfrac{360^\circ}{n}$或截边长$a_n=2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$的方法等分圆周,得到正$n$边形

正多边形$\begin{cases}\text{各边相等}\\\text{各角相等}\end{cases}$

正多边形的计算



(1)$\alpha_n=\dfrac{360^\circ}{n}$

(2)$a_n=2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$

(3)$r_n=R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$

(4)$R^2=r_n^{\ 2}+\dfrac{1}{4}a_n^{\ 2}$

(5)$P_n=na_n$(P_n:周长)

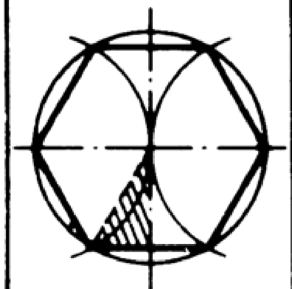
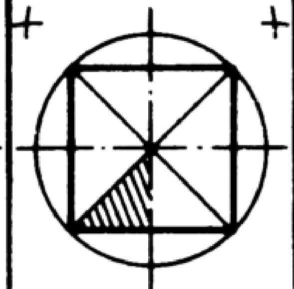
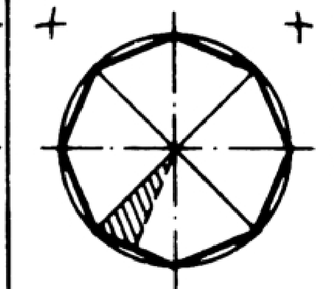
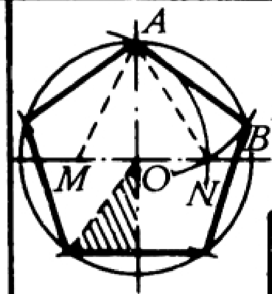
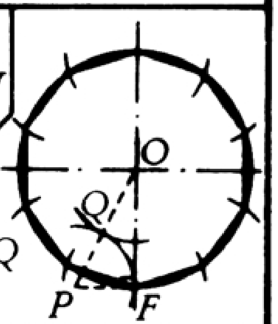
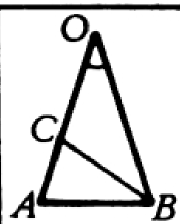
(6)$S_n=\dfrac{1}{2}nr_na_n=\dfrac{1}{2}r_nP_n$($S_n$:面积)

一些正多边形的尺规作图和计算

可以作正3×2^n边形

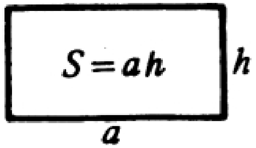
可以作正4×2^n边形

可以作正5×2^n边形

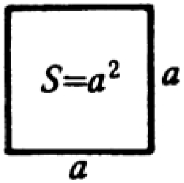
	正三角形	正六边形	正方形	正八边形	正五边形	正十边形
尺规作图					 $\left.\begin{array}{l}OM=\frac{1}{2}R\\MN=MA\end{array}\right\}\Longrightarrow a_5=AN$	 $\left.\begin{array}{l}FP=\frac{1}{2}R\\PQ=PF\end{array}\right\}\Longrightarrow a_{10}=OQ$
α	120°	60°	90°	45°	72°	36°
a	$\sqrt{3}R$	R	$\sqrt{2}R$	⊛ $\sqrt{2-\sqrt{2}}R$	⊛ $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}R$	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R\approx0.618R$
r	$\frac{1}{2}R$	$\frac{\sqrt{3}}{2}R$	$\frac{\sqrt{2}}{2}R$	⊛ $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}R$	黄金分割	 $\left.\begin{array}{l}\angle AOB=36^\circ\\OA=OB=m\\BC\text{平分}\angle B\end{array}\right\}\Longrightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{CA}$ 解关于OC的方程,得$OC=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)m$
S	$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$	$2R^2$	⊛ $2\sqrt{2}R^2$		

20. 多边形的面积和圆的度量

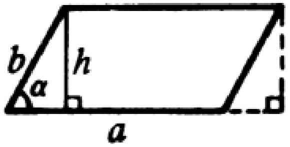
多边形的面积公式



矩形



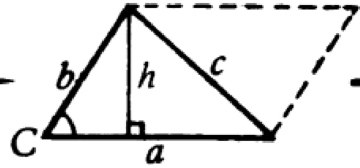
正方形



平行四边形

$S=ah$

$=ab\sin\alpha$



三角形

$S=\frac{1}{2}ah$

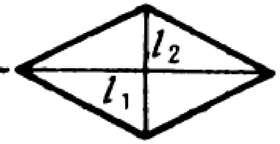
$=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

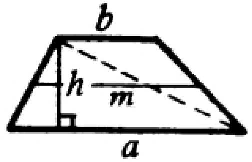
$=sr$

〔$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，

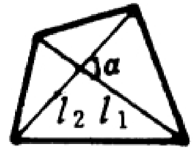
r为内切圆半径〕



$S_{菱形}=\frac{1}{2}l_1l_2$

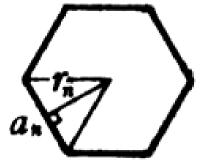


$S_{梯形}=\frac{1}{2}(a+b)h=mh$



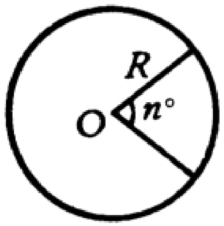
$S_{四边形}=\frac{1}{2}l_1l_2\sin\alpha$

$S_{多边形}=S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{II}}+S_{\mathrm{III}}$



$S_{正多边形}=\frac{1}{2}na_nr_n$

圆的度量

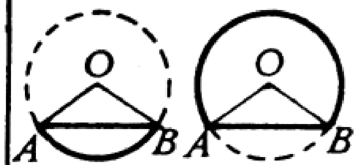


（半径：R）

（圆心角：$n°$）

- 圆周长 $C=2\pi R=\pi D$
- 弧长 $l=\frac{n\pi R}{180}$
- 圆面积 $S=\pi R^2=\frac{\pi D^2}{4}$
- 扇形面积 $S=\frac{n}{360}\pi R^2$

  $=\frac{1}{2}lR$



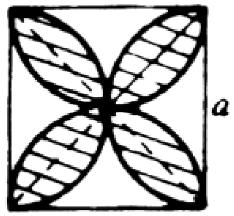
弓形面积

$S_{弓形}=S_{扇形}\mp S_{\triangle OAB}$

组合图形的面积计算

用面积割、补、拼等方法计算

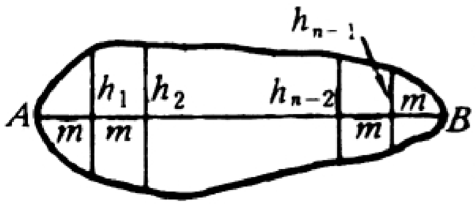
如：$S_{阴影}=8S_{弓形}=\frac{1}{2}\pi a^2-a^2$



实用简易测地法

把地长AB分成n等份，每份长m，量出各分点处的地宽h_1、h_2、…h_{n-2}、h_{n-1}，当m不大时，把每一小条当作三角形或梯形计算，得

$S\approx m(h_1+h_2+\cdots+h_{n-2}+h_{n-1})$



21. 四种命题间的关系和轨迹

四种命题间的关系

原命题 $A \Rightarrow B$	互逆	逆命题 $B \Rightarrow A$
互否	互为逆否 / 互为逆否	互否
否命题 $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$	互逆	逆否命题 $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

$\left(\begin{array}{l} A \Longrightarrow B \text{ 是指若} A \text{成立，则} B \text{就成立} \\ \overline{A} \Longrightarrow \overline{B} \text{ 是指若} A \text{不成立，则} B \text{就不成立} \end{array}\right)$

两个互为逆否的命题是等价命题

原命题 $\Longleftrightarrow$ 逆否命题

否命题 $\Longleftrightarrow$ 逆命题

命题的证明方法

- 直接证法
  - 综合法
- 间接证法
  - 反证法
  - 同一法

已知：弓形角 $\angle AMB = \alpha$

$\angle ASB < \alpha$

求证：S不在弓形AMB内

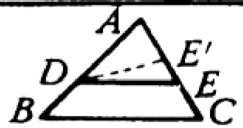
证明：用反证法

假设S在弓形AMB内

$\Longrightarrow \angle ASB > \angle APB = \alpha$

与$\angle ASB < \alpha$矛盾

$\therefore$ S不在弓形AMB内



已知：$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$

求证：$DE \parallel BC$

证明：作$DE' \parallel BC$

$\Longrightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE'}{AC}$

$\cdots \Longrightarrow AE = AE'$

$\therefore DE$和DE'重合

$\therefore DE \parallel BC$

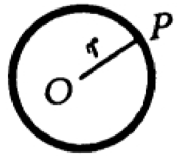
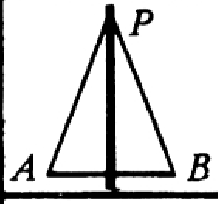
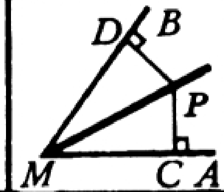
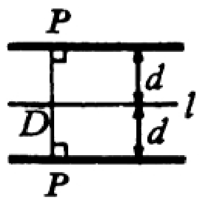
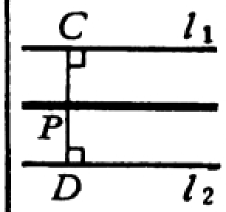
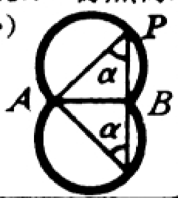
点的轨迹

点的轨迹是符合某一条件的点的集合

如果$\left\{\begin{array}{l} (1)\ A\text{:点}P\text{在图形}F\text{上} \Longrightarrow B\text{:点}P\text{符合条件}C \\ (2)\ B\text{:点}P\text{符合条件}C \Longrightarrow A\text{:点}P\text{在图形}F\text{上} \end{array}\right.$

那么，图形F就是符合条件C的点的轨迹

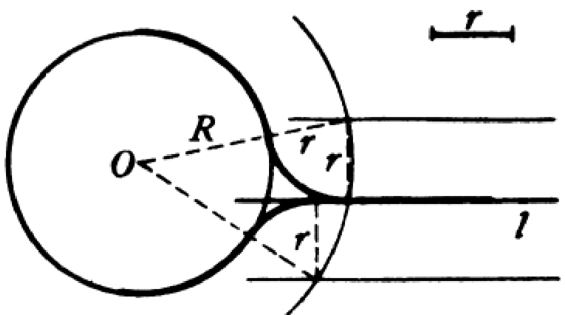
常见的平面内的点的轨迹

条件C	图形F	条件C	图形F	条件C	图形F
点P到已知点O的距离等于已知长r ($PO=r$)	圆 	点P到已知线段AB两端的距离相等 ($PA=PB$)	垂直平分线 	点P到已知角$\angle AMB$的两边的距离相等 ($PD=PC$)	角平分线 
点P到已知直线l的距离等于已知长d ($PD=d$)	两条平行线 	点P到两条平行线l_1、l_2的距离相等 ($PC=PD$)	一条（平行）直线 	点P和已知线段AB两端连线的夹角等于已知角α	以AB为弦，所含圆周角等于已知角α的两段弧（端点除外） 

交轨法作图

例：

用已知半径r作圆弧，连接⊙O和直线l



22. 统计初步

总体：要考察的对象的全体

个体：总体中每一个考察对象

总体

样本

样本：从总体中取出的一部分个体叫做总体的一个样本。
样本容量：样本中个体的数目

统计方法的特点：根据样本的特性去估计总体的相应特性

平均数

样本平均数 $\overline{x}$

用 $\overline{x}$ 去估计总体平均数

（刻划总体的平均大小的特征数）

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

当样本数据较大时用：

$\overline{x}=\overline{x}'+a$，

其中 $\overline{x}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i'$，$x_i'=x_i-a$

（a 是接近 $\overline{x}$ 的事先选定的常数）

当样本数据 $x_1,x_2,\cdots x_k$，分别出现 $f_1,f_2,\cdots f_k$ 次时（$f_1+f_2+\cdots+f_k=n$）

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_if_i=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$$

（f_i 叫做权，$\overline{x}$ 叫做加权平均数）

方差

样本方差 S^2

用 S^2 去估计总体方差

（刻划总体的波动大小的特征数）

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$

* 方差的简化计算：

$$S^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)$$

$$S^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i'^2-n\overline{x}'^2\right)$$

其中 $x_i'=x_i-a$

（a 是接近 $\overline{x}$ 的事先选定的常数）

频率分布

用样本的频率分布去估计总体分布

（总体分布反映了总体中各部分个体在总体中所占的比例大小）

（1） 计算最大值与最小值的差

（2） 决定组距与组数

（数据在100以内，常分成5～12组）

（3） 决定分点

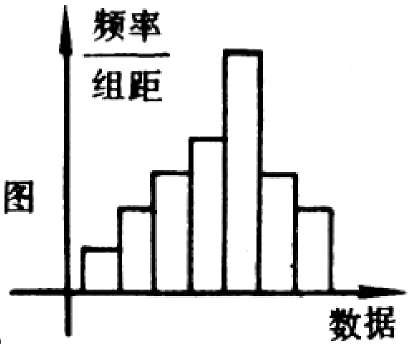
（分点比数据多取一位小数）

（4） 计算频率，列频率分布表

$$频率=\frac{频数}{样本容量}$$

（频数：各组内的数据个数）

（5） 绘频率分布直方图



（各组频率的和等于1，因此各长方形面积的和等于1）

北京市1982年高中、职业高中 中专、技工学校统一招生数学试卷

一、（本题共30分，（1）—（9）小题每题2分，(10)—(13)小题每题3分）填空：

（1）16的平方根是____，16的算术平方根是____；(2)不等式$|x|<7$的解集是____；

（3）计算：$2(-a^2)^3\div a^3=$________；　（4）分解因式：$5x^3-5=$________；

（5）如果一元二次方程$x^2+mx+n=0$的两个根是0和-2，那么$m=$____，$n=$____；

（6）如果$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（$0°<\alpha<180°$），那么$\alpha$的度数是__________；

（7）边长为a的正六边形的每个内角是_____度，它的外接圆半径的长是_____；

（8）化简：$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=$__________；

（9）定理“内接于圆的四边形的对角互补”的逆命题是__________；

(10) A、B两点的坐标分别是$A(a,2)$，$B(-1,b)$，线段AB的中点坐标是$(0,-2)$，那么$a=$________，$b=$________；

(11) 函数$y=3x-2$的图象在y轴上的截距是________，y随着x的增大而增大还是随着x的增大而减小？答：__________；

(12) 当x是_______的实数时，式子$\dfrac{1}{1-\sqrt{x+1}}$有意义；

(13) 设$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{m}$（$a+b\neq0$），用$a$、b的代数式表示m，则$m=$__________.

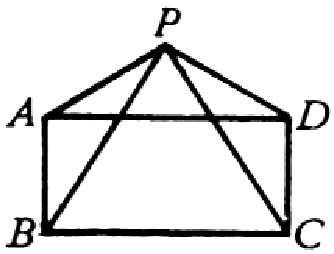
二、（本题共10分，第（1）题4分，第（2）题6分）计算下列各题：

（1）$3^{-2}+(2\frac{7}{9})^{0.5}-(\sqrt{3}-2)^0$；（2）$\log_2 1-\lg 0.01+\log_5\sqrt{\frac{1}{5}}+7^{\log_7\frac{1}{2}}$.

三、（本题6分）用直尺和圆规作图（保留作图痕迹，写出作法，不要求证明）．
已知：$\angle AOB$.　　求作：$\angle AOB$的平分线.

四、（本题6分）用配方法解关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）.

五、（本题6分）已知：如图，四边形ABCD是长方形，PB＝PC．求证：PA＝PD．



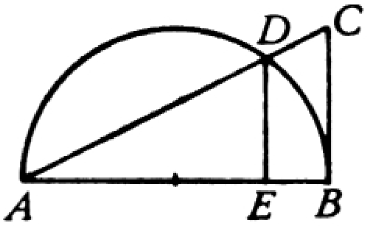
六、（本题10分）已知二次函数$y=-x^2+2x+3$.

（1）当x取什么值时，二次函数有最大值或最小值？最大值或最小值是多少？

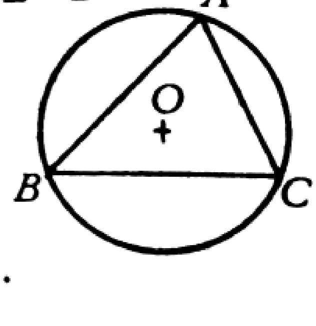
（2）x取什么值时，$y>0$；（3）画出这个函数的图象.

七、（本题10分）某容器盛满纯酒精，第一次倒出6升，然后补满水搅匀．第二次再倒出6升酒精溶液，这时在容器内的溶液中含有纯酒精3升．求这个容器的容积．

八、（本题10分）已知：如图，AB是半圆的直径，BC切半圆于B点，$BC=\dfrac{AB}{2}=r$，AC交半圆于D点，$DE\perp AB$于E．求：DE的长.



九、（本题12分）已知：如图，⊙O是锐角三角形ABC的外接圆．⊙O的半径为R．



（1）求证：$2R=\dfrac{BC}{\sin A}$；

（不准用$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$来证）

（2）当$AC=5$，$AB=6$，$\cos A=\dfrac{1}{5}$时，求BC的长和半径R的值.

上海市一九八二年高中、中专中技招生文化考试数学试题

一、填空：（每格 2 分，共 40 分）

1. 对数有下列性质：（1）________都没有对数，（2）________的对数等于1，（3）________的对数等于零。

2. $2+\sqrt{3}$ 的倒数是______，$2+\sqrt{3}$ 的相反数是______。

3. 如果 $a>0$，那么 $|x|<a$ 的解集是_______，$|x|>a$ 的解集是________。

4. 如果 $ax^2+bx+c\equiv(x-3)(x+4)$，那么 a、b、c 分别是_____________。

5. 边长为 7，24，25 的三角形是________三角形，它的面积是________。

6. 顺次连结矩形四边中点得到的图形是________形，顺次连结菱形四边中点得到的图形是________形。

7. 三角形 ABC 中，AB＝BC，$\angle B=120°$，AC＝12cm，那么 BC＝_______cm，$\triangle ABC$ 面积＝____________cm^2。

8. 已知点 A(1、-3)，B(-2、1)，那么 AB 的距离＝__________，AB 中点 M 的坐标是（__________）。

9. 一次函数 $y=-3x+2$ 的图象与x轴的交点的坐标是（__________），与 y 轴交点的坐标是（__________）。

10. 样本中各数据与样本平均数的_____的平均数叫做样本方差。以 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 表示样本中各数据，以 $\bar{x}$ 表示样本平均数，那么样本方差 $S^2=$__________。

二、选择：〔将正确答案的号码填在（ ）内。答对的每题 2 分，共 10 分。答错或不答不给分〕

1. 数轴上所有的点表示的数是（　　）。
（1）自然数，（2）整数，（3）实数，（4）无理数，（5）有理数。

2. 如果 $a<b<0$，那么下列不等式中第（　　）式成立。
（1）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，（2）$ab<1$，（3）$\frac{a}{b}<1$，（4）$\frac{a}{b}>1$，（5）$a^2<b^2$。

3. 三角形三边之比是 3∶5∶7，那么这个三角形的最大角是（　　）。
（1）60°，（2）80°，（3）90°，（4）120°，（5）150°。

4. 符合下列条件中第（　　）条的四边形是正方形。
（1）对角线相等，（2）对角线互相垂直平分，（3）对角线相等且互相垂直，（4）对角线相等且互相垂直平分。

5. 如果原命题是正确的，那么可以断定（　　）也是正确的。
（1）逆命题，（2）否命题，（3）逆否命题，（4）逆命题、否命题、逆否命题。

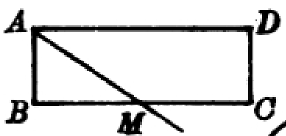
三、在有理数范围内分解因式：（每小题 4 分，共 8 分）

1. $x^2-3xy-54y^2$。　　2. x^4-x^2+4x-4。

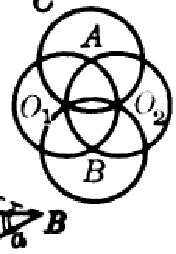
四、计算下列各题：（每小题 4 分，共 12 分）

1. $\dfrac{\log_2(2^9\cdot4^7\cdot8^3)}{\log_2 4}$。　　2. 求不等式 $5\leqslant\dfrac{2x-1}{5}<7$ 的整数解。

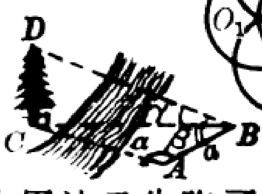
3. 求函数 $y=4x^2+7x-2$ 的极值。



五、（本题 7 分）如图，矩形 ABCD，AB＝3cm，BC＝8cm，M 为 BC 中点，求顶点 D 到直线 AM 的距离。



六、（本题 7 分）如图，半径为 R 的四个等圆，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 分别过圆心 O_2、O_1 且相交于 A、B，$\odot A$ 和 $\odot B$ 分别过圆心 O_1、O_2，求这四个圆的公共部分的面积。



七、（本题 8 分）如图，河对岸有大树 CD，为测树高，在河岸上作一基线 AB，测出 AB＝a，$\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle CBD=\gamma$。试求树高 CD。

八、（本题 8 分）甲乙两学生在 400 米长的跑道上赛跑，第一次甲让乙先跑了 25 米然后甲跑，结果甲比乙早15秒钟到达终点。第二次甲让乙先跑了 36 秒钟然后甲跑，结果乙到达终点时甲离终点还有40米。问甲乙两学生跑完全程各需几秒钟？